

И. И. Привалов
Проф. С. П. И.

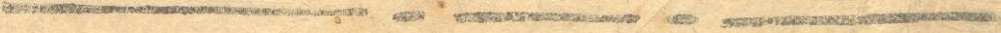
Конспект

Лекций по Высшему Анализу,
читанных в 1919 - 1920 году
в Соратовском Политехническом
Институте.



Издание

Институтского Комитета
Соратовского Политехнического
Института.



Глава I Постоянная и Переменная величина

В математике различают величины двоякого рода: Постоянные и переменные. Постоянной величиной называют такую, которая сохраняет одно определенное значение в течение всего исследования, Переменной — не называется такая величина, которая может получать бесчисленное множество значений.

Свойства данного вопроса определяют классы из рассматриваемых величин нужно считать за постоянные и классы за переменные.

Так например длина хорды вписанной в данную окружность радиуса R есть величина переменная, так как она может получать все значения от 0 до $2R$, радиус — же R окружности величина постоянная.

Если 2 переменные величины связаны условиями задают так, что только одной из них можно давать произвольные значения, а значения другой, соответствующие значениям первой, определяются данной зависимостью между переменными, то первая называется независимой переменной или аргументом, вторая зависимой или функцией от первой.

Если в рассматриваемом вопросе входят не две, а большее число переменных связанных между собой условиями, то те переменные, которым можно давать произвольные значения, называются независимыми, а те, значения которых, при выбранных значениях независимых переменных, определяются данными условиями,

называются функциями от этих независимых переменных. Если обозначить через x независимые переменные*, то x^3 , $\sqrt{x}$, $\cos x$, $\log x$ и т.д. будут функциями от x , вообще всякая формула, изображающая результат каких-нибудь действий произведенных над количеством x , изображает ф-ию от x . Если через x , y обозначим две стороны прямоугольника, а через n его площадь, то между n , x , y будет иметь зависимость, выражаемую ур-нием: $n = xy$; Здесь можно давать переменным x , y произвольные значения, а соответствующие значения n будут определяться предыдущим ур-нием; Следовательно n будет ф-ией от 2 независимых переменных x , y .

Если бы мы ограничились рассмотрением лишь таких прямоугольников, у которых периметр, т.е. сумма сторон, равен данной постоянной величине a , то имели бы между n , x , y следующие две зависимости:

$$n = xy \quad \text{и} \quad 2x + 2y = a$$

Здесь одному переменному попр. x можно давать произвольные значения, а соответствующие значения n и y определяются из ур-ний;

Следовательно в этом случае x независимое переменное, а n и y ф-ии этого переменного. Постоянные величины обыкновенно обозначают латинскими буквами латинского или греческого алфавита: $a, b, c, \dots \alpha, \beta, \gamma, \dots$ а переменные последними $x, y, z, \dots \xi, \eta, \zeta, \dots$

Для обозначения различных функций от

* Часто употребляют слово "переменное" (количество), вместо слова "переменная" (величина).

одного независимого переменного x употребляются символы $f(x)$, $F(x)$, $y(x)$, ... буквы f , F , y , ... суть символы различных операций, производимых над x . Ф-та от нескольких независимых переменных x, y, z , обозначаются символами: $f(x, y, z...)$, $F(x, y, z...)$, $y(x, y, z...)$ и т.д. Результатом подстановки частного значения a вместо x в ф-ту $f(x)$ изображается: $[f(x)]_{x=a}$ или $f(a)$. напр. если $f(x) = x^2 - 2x + 2$, то $f(1) = 1$.

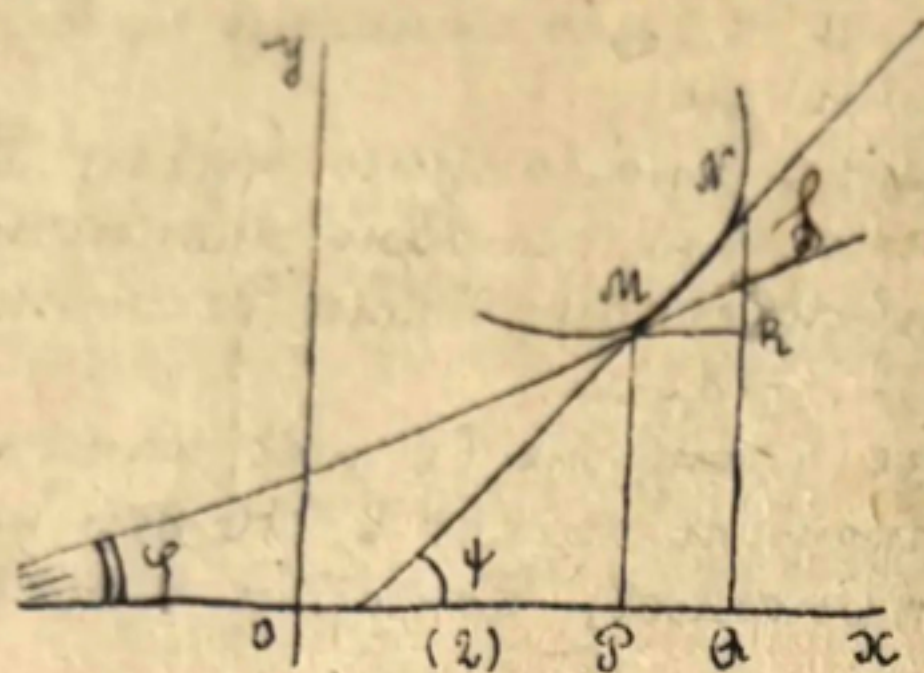
точно так же: $f(a, b, c, ...)$ обозначает результат подстановки: $x=a$, $y=b$, $z=c$... в ф-ту $f(x, y, z, ...)$, напр. если $f(x, y, z) = y^2 - 3x + yz$, то $f(1, 1, 2) = 0$.

функция называется явной, если указаны те действия, которые нужно произвести над независимыми переменными для получения функций, и неявной, если она задается ур-нем между переменными. Например, $y = x + \sin x$ явная ф-та от x ; если y связано с x ур-нем:

$x^2 + y^2 - 2x = 5$, то y есть неявная ф-та от x . Чтобы неявную ф-ту сделать явной, надо решить уравнение относительно буквы, изображающей ф-ту, но такое обращение очень часто представляет большие трудности и вообще говоря не всегда и возможно. Функции классифицируют на алгебраические и трансцендентные.

К первым относят все те, зависимость которых от независимых переменных может быть выражена при помощи одних алгебраических действий, т.е. сложения, вычитания, умножения, деления возвышения в целую положительную степень

Проведен секущую через точки M и N . из чертежа
следует: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.



Будем теперь h при-
ближать к нулю. Точка
 N будет двигаться по кри-
вой, приближаясь к M ,
секущая не будет враща-
ться около M . — то предель-
ное положение, к которому
стремится при этом
секущая, буде оно суще-
ствует, называется ка-
сательной к кривой в точке M .

Обозначая через φ угол наклона касательной
к оси x , будем иметь:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \psi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

т.е. производная для некоторой точки кривой
равна тангенсу угла наклона к оси x касатель-
ной к кривой в этой точке.

Этой проблемой касательной и привел Лейбниц
к открытию дифференциального исчисления.

§ 2. Дифференциал и его геометрический смысл.

Если $f'(x)$ есть производная от $f(x)$ для некото-
рого значения x , а $h = \Delta x$ произвольно выбран-
ное приращение x , то дифференциал от $f(x)$,
обозначаемый символом $d f(x)$, определяется
уравнением: $d f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$ (1)

положив в этом равенстве $f(x) = x$ и замечая,
что $f'(x) = 1$, равенство (1) приведет к

$dx = \Delta x$, т.е. дифференциал
независимого переменного равен его прира-
щению. Если так же равенство (1),

Вторыми дифференциальными функциями называют
дифференциальную от ее первого дифференциала
и вообще дифференциальную n -го порядка, дифференциальную от дифференциала $n-1$ порядка.

показав образом: $dy = f'(x) dx$, $d^2y = d(dy) =$
 $= f''(x) dx \cdot dx = f''(x) dx^2$ $d^3y = d(d^2y) =$
 $= f'''(x) dx^2 \cdot dx = f'''(x) dx^3$

откуда получаем выражения производных
через дифференциалы:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

§ 2 формулы Лейбница. Эта формула выражает
производную n -го порядка от произведения двух
функций, через эти функции и их последовательные производные.

Если u и v суть функции x , то

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Дифференцируя снова по x

$$(uv)'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

подобно этому

$$(uv)''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Продолжая дальше, убедимся, что численные
коэффициенты следуют по тому же закону, как
коэффициенты бинома и показатели производных
соответствуют показателям в формуле бинома*).

По способу математической индукции мы докажем формулу
Лейбница: $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \dots$
 $\dots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$ или символически
 $(uv)^{(n)} = (u+v)^n$

*) u и v рассматриваем, как производные нулевого порядка $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$